



Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 1 - Correction

Exercices

Exercice 1 Une grande plaque mobile est située entre deux grandes plaques fixes (cf figure ci-dessous). Deux fluides newtoniens de viscosité $\mu_1 = 0,02 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et $\mu_2 = 0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ sont contenus entre les plaques. Déterminer l'intensité et la direction des contraintes sur chacune des parois quand la plaque centrale mobile se déplace à une vitesse de $u = 4 \text{ m/s}$ parallèlement aux autres plaques. Faire l'hypothèse que le profil de vitesse entre les plaques est linéaire.

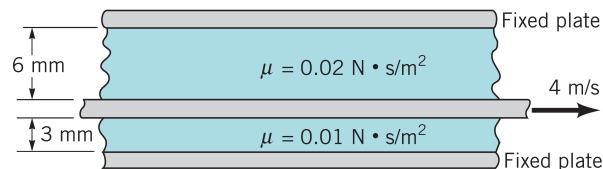


FIGURE 1 – Cisaillement entre deux plaques.

Exercice 2 Déterminer le moment du couple nécessaire pour faire tourner un cylindre vertical de diamètre 50 mm à une vitesse constante de $\omega = 30 \text{ rad/s}$ à l'intérieur d'un cylindre de diamètre 50,2 mm. L'espace entre les cylindres est rempli d'une huile de viscosité $\mu_{20} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ à 20°C . La longueur des cylindres est $h = 200 \text{ mm}$. Négliger les effets de bord et faire l'hypothèse que le profil de vitesse entre les deux cylindres est linéaire. De quel pourcentage le couple sur le cylindre intérieur varie si la température de l'huile est augmentée jusqu'à 80°C ($\mu_{80} = 0,008 \text{ Pa}\cdot\text{s}$).

Exercice 3 Le caractère newtonien ou non newtonien d'un fluide est généralement déterminé de manière expérimentale en étudiant la contrainte de cisaillement τ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Afin de déterminer la viscosité

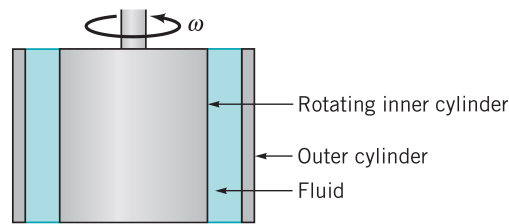


FIGURE 2 – Principe du viscosimètre de Couette.

d'un échantillon de sang, on mesure la contrainte de cisaillement à différents taux de cisaillement à l'aide d'un viscosimètre. À partir des données obtenues, déterminer si le sang est un liquide newtonien ou non newtonien. Expliquez votre démarche.

τ [Pa]	0,04	0,06	0,12	0,18	0,30	0,52	1,12	2,10
du/dy [s^{-1}]	2,25	4,50	11,25	22,25	45,0	90,0	225	450

Exercice 4 Un insecte (6 pattes) de masse $m = 10^{-5}$ kg marche sur l'eau. Ses pattes sont de même longueur et reposent à plat sur la surface libre du liquide. Quelle est la longueur minimale des pattes pour qu'il ne coule pas (la tension de surface est $\gamma = 72$ mN/m pour de l'eau)? On considérera que la force due à la tension de surface agit verticalement et que la poussée d'Archimède est négligeable.



FIGURE 3 – Insecte à la surface de l'eau.

Exercice 5 Une lame de rasoir évidée en son centre (périmètre extérieur 154 mm, périmètre intérieur 52 mm, masse 1,3 g) flotte à la surface de l'eau ($\gamma = 72$ mN/m). Quel doit être l'angle de contact pour que la lame flotte? Que se passe-t-il si la lame n'est pas évidée? On négligera la poussée d'Archimède.



FIGURE 4 – Lame de rasoir flottant à la surface de l'eau.

Exercice 6 Un tube en verre vertical ouvert à ses deux extrémités est plongé dans un bac d'eau à 20 °C. Quel doit être le rayon minimal du tube afin que l'eau ne monte pas de plus de 1,0 mm ?

Indications : on prendra un angle de contact $\theta = 0$, $\gamma = 72 \text{ mN/m}$.

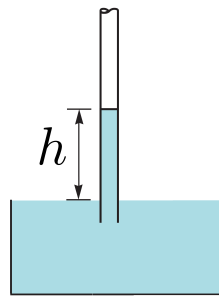


FIGURE 5 – Tube capillaire.

Exercice 7 Un tube en verre de diamètre 3 mm ouvert à ses deux extrémités est plongé dans un bac de mercure liquide à 20 °C ($\gamma = 0,485 \text{ N/m}$, $\rho = 13\,546 \text{ kg/m}^3$). Quelle va être la différence de hauteur entre le mercure du tube et celui du bac ?

Indications : l'angle de contact mercure/verre est de 130 °C.

Corrections

Exercice 1 Dans un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement est égale au taux de cisaillement multiplié par la viscosité dynamique

$$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}.$$

Le profil de vitesse étant supposé linéaire, le gradient de la vitesse s'écrit $du/dy = u/h$, on obtient donc

$$\tau = \mu \cdot \frac{u}{h}$$

avec h la hauteur respective de chaque côté de la paroi. Cela donne donc :

$$\tau_1 = 0,02 [\text{Pa} \cdot \text{s}] \frac{4 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{6 \cdot 10^{-3} [\text{m}]} = 13,3 [\text{Pa}]$$
$$\tau_2 = 0,01 [\text{Pa} \cdot \text{s}] \frac{4 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{3 \cdot 10^{-3} [\text{m}]} = 13,3 [\text{Pa}]$$

La contrainte de cisaillement est la même dans tout le liquide cisailé. Cependant le taux de cisaillement est supérieur dans la couche de liquide inférieur (respectivement supérieur dans la couche de liquide supérieur), mais l'épaisseur de liquide y est inférieur. La direction de la contrainte est la même que celle du gradient de vitesse. Dans cet exercice, les contraintes sont donc parallèles aux plaques.

Note : La contrainte de cisaillement au sein d'un fluide est généralement définie comme étant la contrainte qu'une couche de fluide exerce sur la couche qui est au-dessus, la couche de dessus ayant une vitesse plus grande. Dans cette convention, la couche du dessous ralentit la couche du dessus. La contrainte est alors négative et orientée dans le sens opposé au gradient de vitesse.

Mais attention, si l'on parle de la contrainte de cisaillement que la plaque en mouvement exerce sur le fluide, le sens de la contrainte est alors le même que celui du gradient de vitesse.

Le liquide cisailé exerce sur chacune des plaques entre lesquelles il est confiné une force de cisaillement ayant la même direction que le gradient de vitesse. Cette force est égale au produit de la contrainte de cisaillement τ et de la surface de contact entre la plaque et le liquide.

Dans le cas de la plaque centrale (en mouvement) cette force s'oppose au mouvement de la plaque. Il faut donc fournir une force dans le sens inverse pour maintenir la plaque en mouvement (p. ex. tirer sur la plaque).

Dans le cas de la plaque latérale (immobile), cette force cherche à entraîner la plaque dans le sens de la vitesse du fluide. Si la plaque latérale n'est pas fixée à un socle, elle entrera en mouvement.

Dans ce type de problème, il est important de bien préciser si l'on parle de la contrainte du fluide sur la plaque, ou de la contrainte de la plaque sur le fluide. Ces deux contraintes ne diffèrent que par leur sens.

Exercice 2 Le profil de vitesse étant supposé linéaire, la contrainte de cisaillement s'exprime ainsi :

$$\tau = \mu \cdot \frac{v}{d} = \mu \cdot \frac{\omega r_i}{d} [\text{N} \cdot \text{m}]$$

ou r_i est le rayon intérieur et d est l'épaisseur de couche de fluide. La force de cisaillement qu'exerce le fluide sur le cylindre intérieur s'obtient en multipliant la contrainte par la surface de contact :

$$F = 2\pi r_i h \tau [\text{N}]$$

Cette force de cisaillement résulte du frottement du liquide sur **toute** la surface du cylindre. Étant donné la géométrie du système, cette force transmet un couple sur l'axe du cylindre. Le moment du couple transmis sur l'axe se calcule en intégrant sur la surface S du cylindre le moment qui résulte de l'action de la contrainte de cisaillement τ sur chaque élément de surface infinitésimal $ds = r_i d\theta dh$:

$$\begin{aligned} M_\tau &= \int \int_S r_i \tau ds = \int \int_S r_i \tau r_i d\theta dh = r_i^2 \tau \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dh = r_i^2 \tau 2\pi h [\text{N} \cdot \text{m}^{-2}] \\ &= 2\pi r_i^2 h \mu \cdot \frac{r_i \omega}{d} [\text{N} \cdot \text{m}] \\ M_\tau &= 0,589 [\text{N} \cdot \text{m}] \end{aligned} \tag{1}$$

avec $d = 0,1$ mm l'épaisseur du fluide.

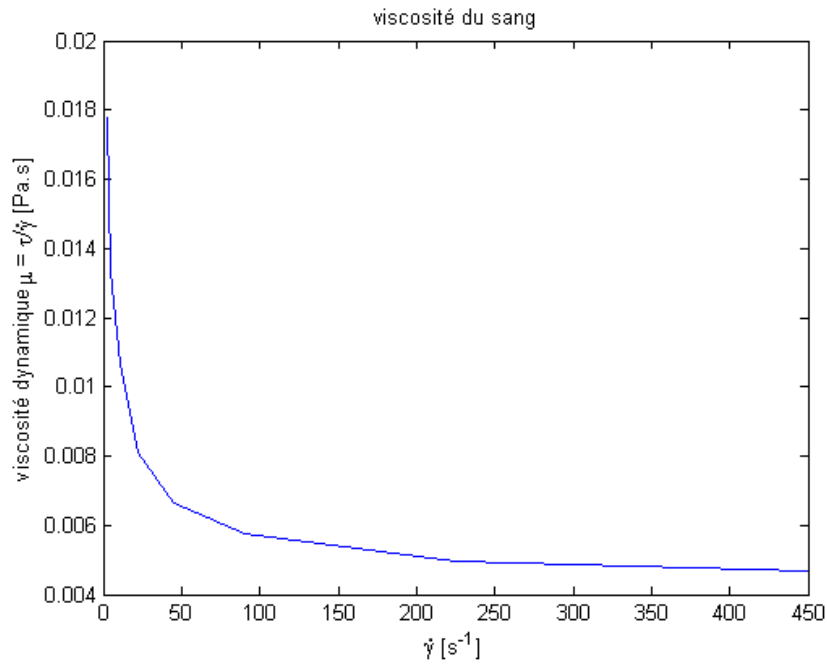
Le moteur doit donc transmettre au cylindre un couple C similaire, mais orienté dans le sens inverse, pour assurer la rotation du cylindre.

D'après (1), le couple C varie linéairement avec la viscosité μ . On a donc :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{0,1 - 0,008}{0,1} = 0,92 [-]$$

Le couple varie de 92 % avec le changement de température.

Exercice 3 Un fluide est dit newtonien lorsque la relation entre la contrainte de cisaillement τ [Pa = N/m²] et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ [s⁻¹] est linéaire. Le rapport $\tau/\dot{\gamma}$ est appelé coefficient de viscosité dynamique et est noté μ [Pa.s]. La viscosité dynamique d'un fluide newtonien ne dépend donc pas du taux de cisaillement (c'est-à-dire de la vitesse de déformation). Le sang est par conséquent un fluide non newtonien (sa viscosité dynamique diminue avec le taux de cisaillement).



Exercice 4 En négligeant la poussée d'Archimède, il y a deux forces qui s'exercent sur les pattes de l'insecte, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ orienté vers le bas, et la force résultant de la tension de surface \vec{F}_s orientée vers le haut.

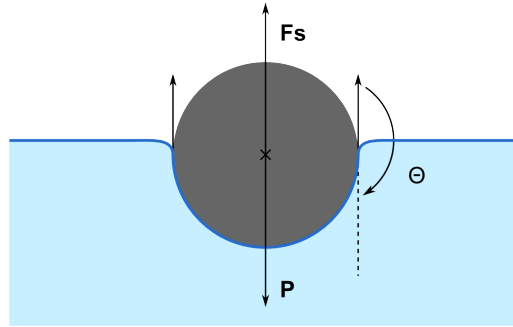
Le bilan des efforts sur l'insecte donne :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{f \rightarrow s} + m\vec{g} &= 0 \\ -l\gamma \cos(\theta) - mg &= 0 \\ l\gamma - mg &= 0\end{aligned}$$

avec l la longueur de contact totale entre l'insecte.

Attention : On parle de la force du fluide sur le solide $\vec{F}_{f \rightarrow s} = -l\gamma \cos(\theta) = l\gamma \vec{e}_y$ avec $\theta = \pi$ rad ou 180°. Voir la figure ci-dessous. Le vecteur unitaire \vec{e}_y n'est pas représenté sur la figure mais est orienté vers le haut.

Vue en coupe d'une patte de l'insecte



La longueur de contact totale nécessaire pour que l'insecte flotte est donc de :

$$l = \frac{mg}{\gamma} = \frac{10^{-5} [\text{kg}] \cdot 9,81 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{72 \cdot 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]} = 1,4 [\text{mm}] \quad (2)$$

Puisque qu'il y a 6 pattes au total et que sur chaque patte il y a 2 films qui se forment, la longueur minimale d'une patte pour assurer la flottaison de l'insecte est de $1,4/12 = 0,12 \text{ mm}$.

Exercice 5 Le bilan des forces sur la lame en négligeant la poussée d'Archimède est le suivant :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{f \rightarrow s} + m\vec{g} &= 0, \\ -(l_e + l_i) \gamma \cos(\theta) - mg &= 0. \end{aligned}$$

Attention : On parle de la force du fluide sur le solide $\vec{F}_{f \rightarrow s} = -l\gamma \cos(\theta) \vec{e}_y$. Voir la figure ci-dessous.

L'angle de contact lorsque la lame flotte est donc de :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= -\frac{mg}{\gamma(l_e + l_i)} = -\frac{1,3 \cdot 10^{-3} [\text{kg}] \cdot 9,81 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{72 \cdot 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}] \cdot (0,154 + 0,052) [\text{m}]} = -0,86 [-] \\ \theta &= 149,3^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

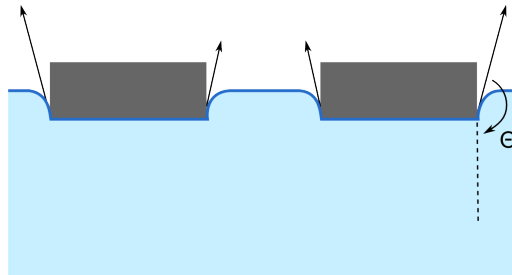
Si la lame n'est pas évidée, l'équation (3) devient :

$$\cos(\theta) = -\frac{mg}{\gamma \cdot l_e} = -\frac{1,3 \cdot 10^{-3} [\text{kg}] \cdot 9,81 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{72 \cdot 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}] \cdot 0,154 [\text{m}]} = -1,15 [-]$$

Ce qui est bien impossible. La lame ne peut alors pas flotter !

Note : l'angle de contact se dessine depuis l'interface gaz-liquide vers l'interface liquide-solide.

Vue en coupe de la lame de rasoir



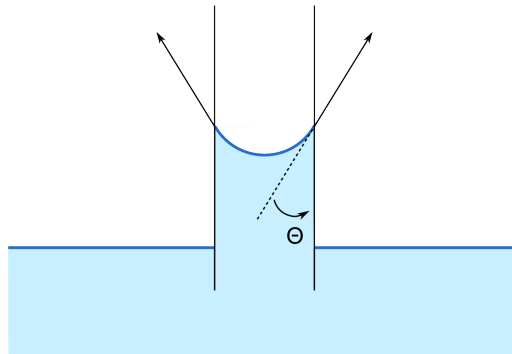
Exercice 6 Bilan des efforts sur le ménisque :

$$\begin{aligned}\vec{F}_s + m\vec{g} &= 0 \\ 2\pi r\gamma \cos\theta - \rho\pi r^2 h|g| &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

Donc, le rayon **minimal** pour que $h < 1$ est donné par :

$$\begin{aligned}r &\geq \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g h} \\ &\geq \frac{2 \cdot 72 \cdot 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}] \cdot 1}{10^3 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot 9,81 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \cdot 10^{-3} [\text{m}]} = 1,47 [\text{cm}]\end{aligned}$$

Vue en coupe du ménisque



Exercice 7 La relation (4) donne la hauteur h dans le tube :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

$$= \frac{2 \cdot 0,485 [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}] \cdot (-0,64)}{13546 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot 9,81 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} [\text{m}]} = -3,13 [\text{mm}]$$

Le mercure s'abaisse de $-3,13 \text{ mm}$ quand on insère le tube en verre.

Vue en coupe du ménisque

